Funkcionalni redovi

October 22, 2019

Funkcionalni nizovi

Definicija

Neka su $f_n(x)$ realne funkcije jednog realnog argumenta koje imaju isti domen $D \subseteq \mathbb{R}$. Uređeni skup funkcija $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ zove se ***funkcionalni niz*** *$(f_n(x))$.*

Za razliku od brojnih nizova, kod funkcionalnih nizova razlikujemo običnu i uniformnu (ravnomernu) konvergenciju.

Definicija

Niz $(f_n(x))$ ***konvergira u tački*** *$x_0 \in D$ ako konvergira brojni niz $(f_n(x_0))$.*

Definicija

Niz $(f_n(x))$ ***konvergira na intervalu*** *$I \subseteq D$ ako postoji realna funkcija $f(x),\ x \in I$, takva da:*
$(\forall x \in I)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})(n > N(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

(Niz $(f_n(x))$ konvergira na intervalu $I \subseteq D$ ako konvergira u svakoj tački tog intervala.)

Funkcija $f(x)$ se zove **granična funkcija niza** $(f_n(x))$, tj.
$f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x),\ x \in I$.

Definicija

*Niz $(f_n(x))$ **ravnomerno/uniformno konvergira** ka graničnoj funkciji $f(x)$ na $D \subseteq \mathbb{R}$ ako:*
$(\forall x \in D)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})(n > N(\varepsilon) \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$
tj. (skoro) svi članovi niza $(f_n(x))$ se nalaze u ε-okruženju funkcije $f(x)$.

Oznaka $(f_n(x)) \rightrightarrows f(x)$.

Osobine uniformne konvergencije funkcionalnih nizova

Teorema

Neka je niz $(f_n(x))$ *uniformno konvergentan na skupu I ka funkciji* $f(x)$*. Ako* $\forall n \in \mathbb{N}$ *postoji konačan* $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ *(tj. tačka a je tačka nagomilavanja skupa I) onda postoji i konačna granična vrednost* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$*.*
Pri tom važi: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$*.*

Podsećanje: Tačka a je **tačka nagomilavanja skupa** I akko svaka ε-okolina tačke a sadrži bar jednu tačku skupa I različitu od a, tj. $(\forall \varepsilon > 0)(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap I \setminus \{a\} \neq \varnothing$.

Teorema

Ako su funkcije $f_n(x)$ neprekidne u tački a i ako niz $(f_n(x))$ ravnomerno konvergira ka $f(x)$ onda je i $f(x)$ neprekidna u tački a.

Podsećanje:

- Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna u tački a ako: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.
- Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna u tački a onda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Na osnovu teoreme važi:

$$\underline{f(a)} = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \underline{\lim_{n\to\infty} f_n(a)}$$

Teorema

Neka važi:

1. *Funkcije $f_n(x)$ su neprekidne na segmentu $[a, b], \forall n \in \mathbb{N}$.*
2. *Niz $(f_n(x))$ uniformno konvergira na segmentu $[a, b]$ ka graničnoj funkciji $f(x)$.*

Tada je granična funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$.

Podsećanje:

- Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna na nekom skupu ako je neprekidna u svakoj tački tog skupa.
- Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna na segmentu $[a, b]$ ako je neprekidna na (a, b) i neprekidna sleva u tački b, odnosno zdesna u tački a.

Teorema

Neka je $(f_n(x))$ *niz funkcija. Ako je svaka funkcija* $f_n(x)$ *integrabilna i ako* $(f_n(x)) \rightrightarrows f(x)$ *na* $[a, b]$ *onda je i* $f(x)$ *integrabilna funkcija na* $[a, b]$ *i važi:*
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty}(f_n(x))dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x))dx.$

Teorema

Neka je $(f_n(x))$ *niz funkcija takve da* $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Ako važi:*

a) *Funkcije* $f_n(x)$ *su neprekidne i imaju neprekidne izvode* $f_n'(x)$ *na* (a, b), $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) *Niz* $(f_n(x))$ *konvergira bar u jednoj tački* $c \in (a, b)$.

c) *Niz izvoda* $(f_n'(x)) \rightrightarrows f^*(x)$.

Tada važi:

1) $(f_n(x)) \rightrightarrows f(x)$.

2) $f(x)$ *je neprekidna i ima neprekidan izvod* $f'(x)$ *na* (a, b).

3) $f^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = f'(x)$.

Funkcionalni redovi

Definicija

*Neka je $(f_n(x))$ funkcionalni niz. Beskonačni zbir funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ zove se **funkcionalni red**.*

Definicija

*Zbir prvih n članova funkcionalnog niza $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ zove se n-ta **parcijalna suma** funkcionalnog reda.*

$S_n(x)$ je funkcija, definisana na istom domenu kao i $f_k(x)$.

Definicija

Red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ***konvergira u tački*** x_0 *ako konvergira brojni red* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$*.*

Skup tačaka $x_0 \in D$ u kojima red konvergira zove se **oblast konvergencije**.

Definicija

Red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *konvergira na intervalu* $I \subseteq D$ *ako niz parcijalnih suma konvergira na intervalu* I*.*

$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \ \forall x \in I$

$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je **suma reda**.

Definicija

Red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ***uniformno/ravnomerno konvergira*** *na intervalu* $I \subseteq D$ *ka funkciji* $S(x)$ *ako niz parcijalnih suma* $(S_n(x))$ *uniformno konvergira na intervalu* I *ka* $S(x)$.

Teorema

Ako je red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *uniformno konvergentan na* (a, b) *onda je on i konvergentan na* (a, b).

Obrnuto ne mora da važi.

Ispitivanje konvergencije funkcionalnog reda se svodi na ispitivanje konvergencije funkcionalnog niza (parcijalnih suma).

Ispitivanje uniformne konvergencije funkcionalnog reda se svodi na ispitivanje uniformne konvergencije funkcionalnog niza (parcijalnih suma).

Kriterijum za ispitivanje uniformne konvergencije:

Teorema

Vajerštrasov kriterijum

Neka $\forall x \in (a, b)$ *i* $\forall k \in \mathbb{N}$ *važi* $|f_k(x)| < M_k,\ 0 < M_k < \infty$. *Ako je pozitivan brojni red* $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ *konvergentan, tada je funkcionalni red* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *uniformno konvergentan na* (a, b).

Osobine uniformne konvergencije funkcionalnih redova

Teorema

Neka je red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *uniformno konvergentan na skupu* $I \subseteq D$ *i neka u nekoj tački a koja je tačka nagomilavanja skupa I postoji* $\lim_{x\to a} f_n(a)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Tada red* $\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to a} f_k(x)$ *konvergira i važi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to a} f_k(x) = \lim_{x\to a} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Teorema

Neka su funkcije $f_k(x)$ *neprekidne na* (a, b) *za svako* $k \in \mathbb{N}$ *i red* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *uniformno konvergentan na* (a, b). *Tada je* $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *neprekidna funkcija na* (a, b).

Teorema

Neka su funkcije $f_k(x)$ neprekidne na (a, b) za svako $k \in \mathbb{N}$ i red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ uniformno konvergentan na (a, b). Tada red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ može da se integrali član po član tj. $\forall x_1, x_2,\ 0 < x_1 < x_2 < b$ važi:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x))dx = \sum_{k=1}^{\infty} (\int\limits_{x_1}^{x_2} f_k(x)dx).$$

Teorema

Neka su funkcije $f_k(x)$ diferencijabilne i $f_k'(x)$ neprekidne na (a, b) za svako $k \in \mathbb{N}$. Takođe neka je red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergentan, a red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ uniformno konvergentan na (a, b). Tada red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ moze da se diferencira član po član i važi:

$$(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x))' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

Stepeni red

Na času:

- Stepeni red
- Uniformna konvergencija stepenih redova
- Predstavljanje funkcije u obliku stepenog reda